

Correspondência entre um par de problemas duais

PRIMAL (DUAL) ←	→ DUAL (PRIMAL)
Maximizar $Max Z$ ($Max W$)	Minimizar $Min W$ ($Min Z$)
1 restrição	1 variável de decisão
i -ésima restrição de tipo “ \leq ”	$y_i \geq 0$ ($x_i \geq 0$)
i -ésima restrição de tipo “ \geq ”	$y_i \leq 0$ ($x_i \leq 0$)
i -ésima restrição de tipo “ $=$ ”	y_i livre (x_i livre)
Termos independentes $b_i \quad i = 1, \dots, m$ ($c_j \quad j = 1, \dots, n$)	Coefficientes da função objectivo $W = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$ ($Z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$)
Coefficientes da função objectivo $Z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ ($W = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$)	Termos independentes $c_j \quad j = 1, \dots, n$ ($b_i \quad i = 1, \dots, m$)
1 variável de decisão	1 restrição
$x_j \geq 0$ ($y_j \geq 0$)	j -ésima restrição de tipo “ \geq ”
$x_j \leq 0$ ($y_j \leq 0$)	j -ésima restrição de tipo “ \leq ”
x_j livre (y_j livre)	j -ésima restrição de tipo “ $=$ ”
Matriz de coeficientes técnicos A (A^T)	Matriz de coeficientes técnicos A^T (A)

O ***i*-ésimo preço-sombra** (y_i) representa a proporção de variação no valor óptimo em função do acréscimo no *i*-ésimo segundo membro.

Relação entre as variáveis de um par de problemas duais

Nº variáveis	Primal	Dual
n	Variável de decisão	Variável Desvio
m	Variável Desvio	Variável de decisão

Propriedades da Dualidade

Propriedade 1: O dual do dual é o primal.

Propriedade 2: Teorema Fraco

Se $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ é SA do primal, problema de maximização, e $\mathbf{y}' = (y'_1, \dots, y'_m)$ é SA do dual então,

$$Z' = c_1 x'_1 + c_2 x'_2 + \dots + c_n x'_n \leq b_1 y'_1 + b_2 y'_2 + \dots + b_m y'_m = W'.$$

Propriedade 3: Se $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ é SA do primal, $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ é SA do dual e

$$Z^* = c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \dots + c_n x_n^* = b_1 y_1^* + b_2 y_2^* + \dots + b_m y_m^* = W^*$$

então, \mathbf{x}^* e \mathbf{y}^* são soluções óptimas dos respectivos problemas.

Propriedade 4: Dado um par de problemas duais, se um tem função objectivo ilimitada o outro é impossível.

Propriedade 5: Teorema Forte

Dado um par de problemas duais, se um tem solução óptima então o outro também tem e o valor óptimo dos dois problemas coincide, ou seja, $Z^* = W^*$.

Propriedade 6: Os preços-sombra são os valores das variáveis de decisão na solução óptima do dual.

Tabela: Soluções Primal/Dual

PRIMAL \ DUAL	Tem SA	Não tem SA
Tem SA	Os dois problemas têm SO e $z^* = w^*$	Primal impossível Dual ilimitado
Não tem SA	Primal ilimitado Dual impossível	Primal impossível Dual impossível

Relação de desvios complementares entre soluções básicas complementares para problemas sem restrições de igualdade nem variáveis livres.

Nº variáveis	Variável Primal	Variável Dual
m	Básica	Não Básica
$\ell - m$	Não Básica	Básica